2023 年全国硕士研究生招生考试（数学一）试题及答案解析

一、选择题

1.曲线 $y = x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A.$y = x+\mathrm{e}$.

B.$y = x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

C.$y = x$.

D.$y = x-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【答案】 B

【解析】 $y = x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right), k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)=\ln e=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]$$

令 $\frac{1}{x-1}=t$

$$=\lim_{t\to0}\left[\left(\frac{1}{t}+1\right)\ln(e+t)-\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)\ln(e+t)-(t+1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(e+t)+(1+t)\cdot\frac{1}{e+t}-\frac{1}{t+1}}{1}=\ln e+\frac{1}{e}-1=\frac{1}{e}$$

$y=x+\frac{1}{e}$

2.若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0$.

B. $a>0,b>0$.

C. $a=0,b>0$.

D. $a=0,b<0$.

【答案】 C

【解析】 当 $y''+ay'+by=0$ 有实根时，$a^2-4b\geqslant0$，设根为 r_1,r_2，则 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ 或

$y=\left(c_1+c_r\right)e^{r_1x}\left(r_1=r_2\right)$. 故此时不可能有解在（-∞，+∞）有界. 当 $a^2-4b<0$ 时.

$y=\left(c_1\cos\beta x+c_2\cos\beta x\right)e^{ax}$,若想解在（-∞，+∞）有界，因此 a=0，结合 $a^2-4b<0$ 可得 b＞0.故选 C

3.设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则

A. $f(x)$连续, $f'(0)$不存在.

B. $f'(0)$存在, $f'(x)$在$x=0$处不连续.

C. $f'(x)$连续, $f''(0)$不存在.

D. $f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处不连续.

【答案】 C

【解析】 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$

当 $t\geqslant 0$, $\begin{cases}x=3t\\ y=t\sin t\end{cases}$， 即 $x\geqslant 0$, $y=\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}$

当 $t<0$, $\begin{cases}x=t\\ y=-t\sin t\end{cases}$, $x<0$ 时 $y=-x\sin x$

$$y'=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{9}\cos\dfrac{x}{3} & x>0\\ 0 & x=0\\ -\sin x-x\cos x & x<0\end{cases},\ \lim_{x\to 0}y'(x)=y'(0)=0,\ y'(x)\text{ 在 }x=0\text{ 处连续.}$$

$y_+''(0)=\dfrac{2}{9}$， $y_-''(0)=-2$， $y''(0)$ 不存在.

故选 C

4.已知 $a_n<b_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的

A.充分必要条件.

B.充分不必要条件.

C.必要不充分条件. D.既不充分也不必要条件.

【答案】A

【解析】由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n - b_n\right|$ 收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，由 $|a_n| = |b_n + a_n - b_n| \leqslant |b_n| + |a_n - b_n|$，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，$|b_n| = |a_n + b_n - a_n| \leqslant |a_n| + |b_n - a_n|$，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

故选 A

5. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3，则

A.$r_1 \le r_2 \le r_3$.

B.$r_1 \le r_3 \le r_2$.

C.$r_3 \le r_1 \le r_2$.

D.$r_2 \le r_1 \le r_3$.

【答案】B

【解析】

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ BC & E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & E \end{bmatrix}$$ 故，$r_1 = n$

$$\begin{bmatrix} AB & C \\ 0 & E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

$$r_2 = r(AB) + r(E) = r(AB) + n$$

$$\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E & AB \\ 0 & -ABAB \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -ABAB \end{bmatrix}$$

$$r_3 = r(E) + r(-ABAB) \leqslant n + r(AB)$$

故 $r_1 \leqslant r_3 \leqslant r_2$

6.下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$. C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

【答案】D

【解析】A 中特征值不同,分别为 1、2、3;B 中矩阵为实对称矩阵;C 中矩阵特征值 2 为二重根，对应的线性无关特征向量个数为 2.D 中矩阵的特征值 2 为二重根，特征值 2 对应的线性无关特征向量个数为 1，不可对角化，故选 D

7.已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，若 γ 既可由 α_1, α_2，线性表示，也可由 β_1, β_2 线性表示，则 $\gamma =$

A. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. B. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. C. $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. D. $k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

7 **【答案】**D

【解析】

$\gamma = k_1 a_1 + k_2 a_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$，$k_1 a_1 + k_2 a_2 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$，

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ x_3 = -l_1 \\ x_4 = -1_2 \end{cases} \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = -k \end{cases}, \gamma = 3k\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

8.设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(|X - EX|) =$

A. $\frac{1}{\mathrm{e}}$.B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{\mathrm{e}}$. D.1.

8.**【答案】**C

【解析】$E(|X-1|)$

$=E(X-1)+2\cdot P\{X=0\}$

$=0+2e^{-1}=2e^{-1}$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自总体 $N\left(\mu_2,2\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，且两样本相互独立，

记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i,S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$，则

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n,m\right)$

B. $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$

C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n,m\right)$

D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$

【答案】D

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\quad\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$$

【解析】
$$\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}/n-1}{\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}/m-1}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$$

10. 设 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma\left(\sigma>0\right)$ 是未知参数.记若 $\sigma=a\left|X_1-X_2\right|$ 是 σ 的无偏估计，则 $a=$

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

C. $\sqrt{\pi}$

D. $\sqrt{2\pi}$

10【答案】A

【解析】$Ea\left|X_1-X_2\right|=aE\left|X_1-X_2\right|=a\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma\quad a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

其中：$X_1-X_2\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$，令 $Z=X_1-X_2$

$$E\left|X_1-X_2\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}\cdot e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz=2\int_0^{+\infty}\frac{z}{2\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz$$

$$=2\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\left(-2\sigma^2\right)\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}d\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right)=-\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

二、填空题

11. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$______.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)}{1+x^2-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}=1$$

$\Rightarrow(a+1)=0\quad b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\quad\Rightarrow a=-1,b=2\Rightarrow ab=-2$.

12. 曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为______.

【解析】

$z=x+2y+\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

令 $F(x,y,z)=z-x-2y-\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

$F_x'=-1-\frac{2x}{1+x^2+y^2},F_x'(0,0,0)=-1$

$F_y'=-2-\frac{2y}{1+x^2+y^2},F_y(0,0,0)=-2$

$F_z'=1$ 故平面方程为 $x+2y-z=0$

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x, x\in[0,1]$. 若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$,

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$______.

【答案】0

【解析】 $f(x)=\dfrac{a_n}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ 因此 $f(x)$ 做偶延拓

$$a_n=2\int_0^1(1-x)\cdot\cos n\pi x dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(1-x)d\sin n\pi x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\sin n\pi x\Big|_0^1+\int_0^1\sin n\pi x\right]dx=\frac{2}{n\pi}\cdot\int_0^1\sin n\pi x dx$$

$$=-\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=-\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=-\frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2}=\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$$

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足： $f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$______.

答案： $\dfrac{1}{2}$

【解析】

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx，\text{由于}\int_0^2 f(x)dx=0$$

所以原式为 $=-\int_0^1 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$ ，由于 $\int_2^3 f(x)dx=\int_0^1 f(t+2)dt$ ，故原式 $=\int_0^1[f(t+2)-f(t)]dx=\int_0^1 tdt=\dfrac{1}{2}$

15. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$, 则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$______.

【答案】$\frac{11}{9}$

$$\left(k_1,k_2,k_3\right)\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix}$$

$$\left(k_1,k_2,k_3\right)\begin{pmatrix} \alpha_1^\top \\ \alpha_2^\top \\ \alpha_3^\top \end{pmatrix}\alpha_i=\beta^\top\alpha_i \Rightarrow \alpha_i^\top\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\alpha_i^\top\beta$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\Rightarrow\left(k_1,k_2,k_3\right)=\left(\frac{1}{3},-1,\frac{1}{3}\right)\Rightarrow k_1^2+k_2^2+k_3^2=\frac{11}{9}.$$

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B(1,\frac{1}{3}),Y\sim B(2,\frac{1}{2})$, 则 $P\left\{X=Y\right\}=$______.

16.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】
$$\begin{aligned} p\left(x=y\right)&=p\left(x=0,y=0\right)+p\left(x=1,y=1\right)\\ &=p\left(x=0\right)p\left(y=0\right)+p\left(x=1\right)p\left(y=1\right)\\ &=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\\ &=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

三、解答题

17.(本题满分 10 分）

设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $\left(1,2\right)$ ，该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

（1）求 $y(x)$;

（2）求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)dt$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的最大值.

【解析】

由题意得$y = y'(x - x) + y$切线，切线在y轴上的截距为$-x \cdot y' + y$

则$x = -x \cdot y' + y$.

$y' - \frac{y}{x} = -1$.

$$y(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int + e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx + c\right]$$

$$= x\left[\int \frac{1}{x}dx + c\right]$$

$$= x(-\ln x + c)$$

又$x = 1,\quad y = 2$　则 $c = 2$ 因此 $y(x) = x(-\ln x + 2)$

(2) $f'(x) = y(x) = x(-\ln x + 2) = 0$

则$x = 0$ 或 $x = e^2$.

又$x > 0$故$f(x)$的驻点为$x = e^2$

$$f''(x) = -\ln x + 2 + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'\left(e^2\right) = -2 + 2 - 1 = -1 < 0$$

故$f\left(\mathrm{e}^2\right)$为最大值，最大值为$\int_1^{\mathrm{e}^2} x(-\ln x + 2)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^4 - 5}{4}$

18.（本题满分 12 分）

求函数$f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$的极值.

【解析】

$f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-x^3\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=5x^4-2xy-3x^2y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=y-x^3+y-x^2=2y-x^2-x^3=0$$

得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{10}{27}\end{cases}$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=20x^3-2y-6xy, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2x-3x^2, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

对于 $x=0, y=0; A=0, B=0, C=2.$ 取 $y=x^{\frac{5}{2}}, f(x,y)<0$，取 $y=x$，$f(x,y)>0$

故 $x=0, y=0$ 不是极值点

$(2)x=1, y=1. A=12, B=-5, C=2, AC-B^2=24-25<0.$ 故 $(1,1)$ 不是极值点.

$(3)x=\dfrac{2}{3}, y=\dfrac{10}{27}, A=\dfrac{100}{27}, B=-\dfrac{8}{3}, C=2$，$AC-B^2>0$ $f\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right)=-\dfrac{4}{729}$ 为极小值

19.（本题满分 12 分）

设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 z=0 和 x+z=1 围成. Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧.

计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma} 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy.$$

【解析】

由高斯公式可得

$$I=\iiint_{\Omega} 2z-xz\sin y+3y\sin xdv$$

三重积分先一后二积分得

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_0^{1-x}(2z-xz\sin y+3y\sin x)dz$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1+x^2\right)dxdy$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(y^2+x^2\right)dxdy$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=\frac{5}{4}\pi$$

20.(本题满分12分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有2阶连续导数.证明：

(1)若$f(0)=0$,则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

(2)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$|f''(\eta)|\ge\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

【解析】

（1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)x^2$

$f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)x^2$

$f(a)=f'(0)a+\frac{1}{2}f''\left(\varepsilon_2\right)a^2$.

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{1}{2}f''\left(\varepsilon_1\right)a^2$

$f(-a)+f(a)=\frac{1}{2}\left[f''\left(\varepsilon_1\right)+f''\left(\varepsilon_2\right)\right]a^2$

由介值定理可知平均值$\frac{1}{2}\left[f''\left(\varepsilon_1\right)+f''\left(\varepsilon_2\right)\right]=\frac{f(-a)+f(a)}{a^2}=f''\left(\xi\right)$

$\therefore$ 即证

（2） 设f(x)在x=x_0处取得极值 即$x_0\in(-a\cdot a)$, $f'\left(x_0\right)=0$

$$\therefore f(x)=f\left(x_0\right)+f^{'}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f^{''}(\xi)}{2}\left(x-x_0\right)^2$$

代入 $x=-a,\ x=a$

$$f(-a)=f\left(x_0\right)+\frac{f^{''}\left(\eta_1\right)}{2}\left(a+x_0\right)^2 \quad (1)$$

$$f(a)=f\left(x_0\right)+\frac{f^{''}\left(n_1\right)}{2}\left(a-x_0\right)^2 \quad (2)$$

(2) - (1) 得

$$f(a)-f(-a)=\frac{f^{'}\left(\eta_2\right)}{2}\left(a-x_0\right)^2-\frac{f^{''}\left(\eta_1\right)}{2}\left(a+x_0\right)^2$$

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{f^{''}\left(\eta_2\right)}{2}\left(a-x_0\right)^2-\frac{f^{''}\left(\eta_1\right)}{2}\left(a+x_0\right)^2\right|$$

$$\leq\left|\frac{f^{''}(\eta)}{2}\left(a-x_0\right)^2\right|+\left|\frac{f^{''}(\eta)}{2}\left(a+x_0\right)^2\right|$$

$$\leq\left|\frac{f^{''}(\eta)}{2}\right|\left[\left(a-x_0\right)^2+\left(a+x_0\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{f^{''}(\eta)}{2}\right)\left(2a^2+2x_0^2\right)$$

$$=|f''(\eta)|\left(a^2+x_0{}^2\right)$$

$$\leq\ \left|f^{''}(\eta)\right|\cdot 2a^2,\quad 其中\ f^{''}(\eta)=\max\left\{f^{''}\left(\eta_1\right)\cdot f^{''}\left(\eta_2\right)\right\}$$

$$\therefore\left|f^{''}(\eta)\right|\geqslant\ \frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$$

21.（本题满分12分）

已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3,$

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3.$

(1)求可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化成$g(y_1,y_2,y_3)$;

(2)是否存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化成$g(y_1,y_2,y_3)$?

【解析】

$$(1)A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$f=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+2x_3^2$$

$$=\left(x_1+x_2-x_3\right)^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3+2x_2^2+2x_3^2$$

$$=\left(x_1+x_2-x_3\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2$$

$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}\quad P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2)|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-2&0\\1&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

λ=0,2,3

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\lambda=0,1,2$

特征值不同, 故不存在.

22. （本题满分12分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(1)求X与Y的协方差;

(2)X与Y是否相互独立?

(3)求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.

$$(1) EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xy}{\pi}\left(x^2+y^2\right)dxdy=0$$

$EX=0, EY=0$

$Cov(X,Y)=0$

(2)不独立

（3） $F_z(z)=p\left\{x^2+y^2\leqslant z\right\}$

当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$

当 $z\ge 1$ 时 $F_Z(z)=1$

当 $0\leqslant z<1$ 时

$$F_Z(z)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{z}\frac{2}{\pi}r^3dr=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}z^4d\theta=z^4$$

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}4z^3, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$