2023 年全国硕士研究生招生考试（数学一）试题

一、选择题

1.曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A.$y=x+\mathrm{e}$.

B.$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

C.$y=x$.

D.$y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2.若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0$.　　B. $a>0,b>0$.

C. $a=0,b>0$.　　D. $a=0,b<0$.

3.设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t+|t|, \\ y=|t|\sin t \end{cases}$ 确定，则

A. $f(x)$连续, $f'(0)$不存在.
B. $f'(0)$存在, $f'(x)$在$x=0$处不连续.
C. $f'(x)$连续, $f''(0)$不存在.
D. $f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处不连续.

4.已知 $a_n<b_n\,(n=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的

A.充分必要条件.　　B.充分不必要条件.

C.必要不充分条件.　　D.既不充分也不必要条件.

5. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵．记矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3，则

A.$r_1 \le r_2 \le r_3$.

B.$r_1 \le r_3 \le r_2$.

C.$r_3 \le r_1 \le r_2$.

D.$r_2 \le r_1 \le r_3$.

6.下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$. C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.已知向量$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，若$\gamma$既可由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性表示，也可由$\beta_1$，$\beta_2$线性表示，则$\gamma =$

A. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. B. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. C. $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. D. $k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

8.设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(|X - EX|) =$

A. $\frac{1}{e}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{e}$. D.1.

9. 设$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$为来自总体的$N(\mu_1, \sigma^2)$的简单随机样本,$Y_1, Y_2, Y_3, \dots Y_m$为来自总体的$N(\mu_2, 2\sigma^2)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

则

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n,m)$. B. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,m-1)$.

C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n,m)$. D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,m-1)$.

10. 设X_1, X_2为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数，若$\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$为$\sigma$的无偏估计，则$a=$

A. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.　　B. $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.　　C. $\sqrt{\pi}$.　　D. $\sqrt{2\pi}$.

二、填空题

11. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$______.

12. 曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为______.

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x, x\in[0,1]$. 若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$______.

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$______.

15. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$, 则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$______.

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B(1,\dfrac{1}{3}), Y\sim B(2,\dfrac{1}{2})$, 则 $P\{X=Y\}=$______.

三、解答题

17.(本题满分 10 分)

设曲线$y=y(x)(x>0)$经过点(1, 2), 该曲线上任一点$P(x,y)$到y轴的距离等于该点处的切线在y轴上的截距.

(1) 求$y(x)$;

(2)求函数$f(x)=\int_1^x y(t)\mathrm{d}t$在（0,+∞）上的最大值.

18.（本题满分 12 分）

求函数$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$的极值.

19.（本题满分 12 分）

设空间有界区域Ω由柱面 $x^2+y^2=1$与平面 z=0 和 x+z=1 围成.Σ为Ω的边界曲面的外侧.

计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma} 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy.$$

20.(本题满分12分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有2阶连续导数.证明：

(1)若$f(0)=0$,则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

(2)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

21.（本题满分12分）

已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$,

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$.

(1)求可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化成$g(y_1,y_2,y_3)$;

(2)是否存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化成$g(y_1,y_2,y_3)$?

22.（本题满分12分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(1)求X与Y的协方差;

(2)X与Y是否相互独立?

(3)求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.