2023年全国硕士研究生招生考试（数学二）试题及答案解析

一、选择题

1.曲线 $y = x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A.$y = x + \mathrm{e}$.

B.$y = x + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

C.$y = x$.

D.$y = x - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

【答案】B

【解析】$y = x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)$ $k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right) = \ln e = 1$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-x) = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]$$

令 $\frac{1}{x-1} = t$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{1}{t}+1\right)\ln(e+t)-\left(\frac{1}{t}+1\right)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)\ln(e+t)-(t+1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(e+t)+(1+t)\cdot\frac{1}{e+t}-\frac{1}{t+1}}{1} = \ln e + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e}$$

$$y = x + \frac{1}{e}$$

2.函数 $f(x) = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \le 0,\\ (x+1)\cos x, & x > 0\end{cases}$ 的一个原函数为

A. $F(x)=\begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0, \\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0. \end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0, \\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0. \end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\le 0, \\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0. \end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\le 0, \\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0. \end{cases}$

【答案】D

【解析】

$$\int(x+1)\cos xdx=\int(x+1)d\sin x=(x+1)\sin x-\int \sin xdx=(x+1)\sin x+\cos x+c$$

故排除 AB，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=1\ne\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=0$，排除 C，故选 D

3.已知$\{x_n\},\{y_n\}$满足：$x_1=y_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\sin x_n,y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots)$,则当$n\to\infty$时，

A.x_n是y_n的高阶无穷小.

B.y_n是x_n的高阶无穷小.

C.x_n与y_n是等价无穷小.

D.x_n与y_n是同阶但不等价的无穷小.

【答案】B

【解析】$y_1=\dfrac{1}{2},y_{n+1}=y_n^2$，$y_n=\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}$又，$x_1=\dfrac{1}{2}$ $x_{n+1}=\sin x_n$，所以x_n趋近于 0 得速度显然比y_n要慢，因此答案选 B

4.若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则

A. $a<0,b>0.$

B. $a>0,b>0.$

C. $a=0,b>0.$

D. $a=0,b<0.$

【答案】C

【解析】当$y''+ay'+by=0$有实根时，$a^2-4b\geqslant 0$，设根为r_1,r_2，则$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$或

$y=(c_1+c_r)e^{r_1x}(r_1=r_2)$．故此时不可能有解在（-∞，+∞）有界．当 $a^2-4b<0$ 时．

$y=(c_1\cos\beta x+c_2\cos\beta x)e^{ax}$,若想解在（-∞，+∞）有界,因此 a =0，结合 $a^2-4b<0$ 可得 b ＞0.故选 C

5.设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则

A. $f(x)$连续, $f'(0)$不存在.

B. $f'(0)$存在, $f'(x)$在$x=0$处不连续.

C. $f'(x)$连续, $f''(0)$不存在.

D. $f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处不连续.

【答案】 C

【解析】 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$

当$t\geqslant0$, $\begin{cases}x=3t\\ y=t\sin t\end{cases}$， 即 $x\geqslant0$, $y=\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$

当$t<0$, $\begin{cases}x=t\\ y=-t\sin t\end{cases}$, $x<0$ 时 $y=-x\sin x$

$y'=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3} & x>0\\ 0 & x=0\\ -\sin x-x\cos x & x<0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to0}y'(x)=y'(0)=0$, $y'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$y''_{+}(0)=\frac{2}{9}$， $y''_{-}(0)=-2$， $y''(0)$ 不存在.

故选 C

6.若函数 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}dx$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值，则 $\alpha_0=$

A. $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$　　B. $-\ln(\ln 2)$　　C. $\frac{1}{\ln 2}$　　D. $\ln 2$

【答案】 A

【解析】 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^{\alpha+1}}d(\ln x)=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}$

令 $g(\alpha)=\alpha\cdot(\ln 2)^{\alpha}$， $g'(\alpha)=(\ln 2)^{\alpha}+\alpha\cdot(\ln 2)^{\alpha}\ln\ln 2=0$

$(\ln 2)^{\alpha}(1+\alpha\ln\ln 2)=0\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{\ln\ln 2}$， 故选 A

7.设函数 $f(x)=(x^2+a)e^x$，若 $f(x)$ 没有极值点，但曲线 $y=f(x)$ 有拐点，则 a 的取值范围

A.$[0,1)$　　B.$[1,+\infty)$　　C.$[1,2)$　　D.$[2,+\infty)$

【答案】C.

【解析】 $f'(x)=\left(x^2+2x+a\right)e^x,\Delta=4-4a\le 0\Rightarrow a\ge 1$，

$f''(x)=\left(x^2+4x+a+2\right)e^x$ $\Delta>0\Rightarrow 16-4(a+2)>0\Rightarrow a<2$， 故选 C

8.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵， $\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=$

A. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

【答案】D

【解析】 $\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & B\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}A & E\\ 0 & B\end{vmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & B\end{bmatrix}^{-1}$

$$\begin{bmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1A & X_1+X_2B\\ X_3A & X_3+X_4B\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}B^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}B^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & B\end{bmatrix}^*=|A|\cdot|B|\cdot\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}B^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|B|\cdot A^* & -A^*B^*\\ 0 & |A|\cdot B^*\end{bmatrix}$$

9.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2$　　B. $y_1^2-y_2^2$　　C. $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　D. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】B.

【解析】$f\left(x_1,x_2x_3\right)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&-3&4\\1&4&-3\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&-3-\lambda&4\\1&4&-3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&-3-\lambda&4\\0&7+\lambda&-7-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&-3\lambda&1-\lambda\\0&7+\lambda&0\end{vmatrix}$$

$=(7+\lambda)\lambda(3-\lambda)$. 故选 B

10.已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\gamma}=$

A. $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　B. $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　C. $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　D. $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$

10【答案】D

【解析】

$\gamma=k_1a_1+k_2a_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$， $k_1a_1+k_2a_2-l_1\beta_1-l_2\beta_2=0$，

$$\begin{cases}x_1=k_1\\x_2=k_2\\x_3=-l_1\\x_4=-1_2\end{cases}\quad x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4=0$$

$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = -k \end{cases}, \gamma = 3k\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - k\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix}$$

二、填空题

11. 当$x \to 0$时，函数$f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$与$g(x) = e^{x^2} - \cos x$是等价无穷小，则$ab =$______.

【答案】-2

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax + bx^2 + \ln(1+x)}{e^{x^2} - \cos x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax + bx^2 + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)}{1 + x^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)} = 1$$

$$\Rightarrow (a+1) = 0 \quad b - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow ab = -2.$$

12.曲线 $y = \int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$ 的弧长为______.

【答案】$\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

【解析】

$$y = \int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt,\ y' = \sqrt{3-x^2}，\ 由3 - x^2 \geqslant 0, x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1 + 3 - x^2}\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4 - x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right]\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

13.设函数$z = z(x,y)$由$e^2 + xz = 2x - y$确定，则$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} =$______.

【答案】$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2(1 + e^2).$

【解析】

把 $x=1$，$y=1$代入 $e^2+xz=2x-y\Rightarrow z=1-e^2$

对 $e^2+xz=2x-y$ 两边同时对 x 求导,$0+z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2$,将 $x=1,z=1-e^2$ 代入

$0+z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=1+e^2$.对 $0+z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2$ 两边同时对 x 求导得

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.将 $x=1$，$\frac{\partial z}{\partial x}=1+e^2$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\left(1+e^2\right)$

14.曲线$3x^2=y^5+2y^3$在$x=1$对应点处的法线斜率为______.

【答案】$-\frac{11}{6}$

【解析】

$x=1$代入$3x^2=y^5+2y^3$得 $y^5+2y^3=3$，则 $y=1$.$3x^2=y^5+2y^3$ 两边同时对 x 求导得

$6x=5y^4\cdot y'+6y'\cdot y^2$.将 $x=1$，$y=1$ 代入$6x=5y^4\cdot y'+6y'\cdot y^2$ 得 $6=5y'+6y'$

故 $y'=\frac{6}{11}$.法线斜率为$-\frac{11}{6}$.

15. 设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x+2)-f(x)=x,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0,$ 则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$______.

【解析】

$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$，由于$\int_0^2 f(x)dx=0$

所以原式为 $=-\int_0^1 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$，由于 $\int_2^3 f(x)dx=\int_0^1 f(t+2)dt$，故原式 $=\int_0^1[f(t+2)-f(t)]dx=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}$

16.已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中$a,b$为常数，若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4,$则$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$

【答案】8

【解析】

$$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=4\neq 0, r\begin{bmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{bmatrix}=3,\ r\begin{pmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{pmatrix}=3,$$

$$\begin{vmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{vmatrix}=0, 1\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=8$$

三、解答题

17. 设曲线$L: y=y(x)(x>\mathrm{e})$经过点$(\mathrm{e}^2, 0)$, L上任一点$P(x,y)$到y轴的距离等于该点处的切线在y轴上的截距.

(1) 求$y(x)$;

(2)在L上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积.

【解析】

由题意得$y=y'(x-x)+y$切线，切线在y轴上的截距为$-x\cdot y'+y$

则$x=-x\cdot y'+y$.

$$y'-\frac{y}{x}=-1.$$

$$y(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+c\right]$$

$$=x\left[\int\frac{1}{x}dx+c\right]$$

$$=x(-\ln x+c)$$

又$x=1,\quad y=2$　则 $c=2$ 因此 $y(x)=x(-\ln x+2)$

(2) $f'(x)=y(x)=x(-\ln x+2)=0$

则$x=0$ 或 $x=e^2$.

又$x>0$故$f(x)$的驻点为$x=e^2$

$$f''(x)=-\ln x+2+x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'\left(e^2\right)=-2+2-1=-1<0$$

故$f\left(e^2\right)$为最大值,$\int_1^{e^2} x(-\ln x+2)dx=\frac{e^4-5}{4}$

18. 求函数$f(x,y)=xe^{\cos y}+\frac{x^2}{2}$的极值.

【解析】

$\begin{cases} f_x'=e^{\cos y}+x=0 \\ f_y'=ke^{\cos y}(-\sin y)=0 \end{cases}$, 得驻点$(-e,2n\pi),\left(-\frac{1}{e},(2n+1)\pi\right)$;

$$f_{xx}''=1$$

$$f_{xy}''=e^{\cos y}(-\sin y)$$

$$f_{yy}''=xe^{\cos y}\sin^2 y+ke^{\cos y}(-\cos y)$$

对于$(-e,2n\pi)$, $A=1,B=0,C=\mathrm{e}^2,AC-B^2>0,A>0$.有极小值 $f(-e,2n\pi)=-\frac{e^2}{2}$

对于$\left(-\frac{1}{e},(2n+1)\pi\right)$, $A=1,B=0,C=-\frac{1}{e^2},AC-B^2<0$，无极值.

19.已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge1\}$.

(1)求D的面积;

(2)求D绕x轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx \overset{x=\tan t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 tdt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\tan t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc tdt=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

(2) $\int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx=\int_1^{+\infty}\pi\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\pi(1-\frac{\pi}{4})$

20.(12分)设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1,x^2+y^2-xy=2$与直线$y=\sqrt{3}x,y=0$围成，计算$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】

$$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}}}\cdot\frac{1}{r^2+2r^2\cos^2\theta}\cdot rdr$$

$$=\pi\frac{\sqrt{3}\ln 2}{24}$$

21.（12 分）设函数 $f(x)$ 在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

（1）若 $f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$,使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（2）若 $f(x)$ 在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$使得

$$\left|f''(\eta)\right|\geq\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|.$$

【解析】

（1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

$$f(a)=f'(0)a+\frac{1}{2}f''(\varepsilon_2)a^2.$$

$$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{1}{2}f''(\varepsilon_1)a^2$$

$f(-a)+f(a)=\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]a^2$

由介值定理可知平均值$\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]=\frac{f(-a)+f(a)}{a^2}=f''(\xi)$

∴ 即证

（2） 设f(x)在x=x_0处取得极值 即$x_0\in(-a\cdot a), f'(x_0)=0$

$\therefore f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$

代入 $x=-a,\ x=a$

$f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$ (1)

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(n_1)}{2}(a-x_0)^2$ (2)

(2) - (1) 得

$f(a)-f(-a)=\frac{f'(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$

$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{f''(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2\right|$

$\leq\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a-x_0)^2\right|+\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a+x_0)^2\right|$

$\leq\left|\frac{f''(\eta)}{2}\right|\left[(a-x_0)^2+(a+x_0)^2\right]$

$=\left(\frac{f''(\eta)}{2}\right)(2a^2+2x_0^2)$

$=|f''(\eta)|(a^2+x_0{}^2)$

$\leq\ |f''(\eta)|\cdot 2a^2$， 其中$f''(\eta)=\max\{f''(\eta_1)\cdot f''(\eta_2)\}$

$\therefore \left|f''(\eta)\right| \geqslant \dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$

22.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$;

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解析】

解(1) 由题可知, $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(2) $|A-\lambda E|=-(2+\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$\therefore A$ 中 $\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=-2$

A 中 λ_1 对应的特征向量 $\alpha_1=(4,3,1)^T$.

A 中 λ_2 对应的特征向量 $\alpha_2=\left(-\dfrac{1}{2},0,1\right)^T$

A 中 λ_3 对应的特征向量 $\alpha_3=(0,-1,1)^{\top}$

$\therefore p=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$