2023 年全国硕士研究生招生考试（数学二）试题

一、选择题

1.曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A.$y=x+\mathrm{e}$.

B.$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

C.$y=x$.

D.$y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为

A.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

B.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

C.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

D.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

3.已知 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足： $x_1=y_1=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=\sin x_n, y_{n+1}=y_n^2 (n=1,2,\cdots)$, 则当 $n\to\infty$ 时，

A.x_n是y_n的高阶无穷小.

B.y_n是x_n的高阶无穷小.

C.x_n与y_n是等价无穷小.

D.x_n与y_n是同阶但不等价的无穷小.

4.若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0$.

B. $a>0,b>0$.

C. $a=0,b>0$.

D. $a=0,b<0$.

5.设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t+|t|, \\ y=|t|\sin t \end{cases}$ 确定，则

A. $f(x)$连续, $f'(0)$不存在.
B. $f'(0)$存在, $f'(x)$在$x=0$处不连续.
C. $f'(x)$连续, $f''(0)$不存在.
D. $f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处不连续.

6.若函数 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值，则 $\alpha_0=$

A. $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$　　B. $-\ln(\ln 2)$　　C. $\frac{1}{\ln 2}$　　D. $\ln 2$

7.设函数 $f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$，若 $f(x)$ 没有极值点，但曲线 $y=f(x)$ 有拐点，则 a 的取值范围

A. $[0,1)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $[1,2)$　　D. $[2,+\infty)$

8.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* =$

A. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

9.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2$　　B. $y_1^2-y_2^2$　　C. $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　D. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

10.已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\gamma}=$

A. $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　B. $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　C. $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　D. $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$

二、填空题

11. 当$x\to 0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=\mathrm{e}^{x^2}-\cos x$是等价无穷小,则$ab=$______.

12.曲线$y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,\mathrm{d}t$的弧长为______.

13.设函数$z=z(x,y)$由$\mathrm{e}^2+xz=2x-y$确定,则$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$______.

14.曲线$3x^2=y^5+2y^3$在$x=1$对应点处的法线斜率为______.

15.设连续函数$f(x)$满足：$f(x+2)\text{-}f(x)=x,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$.则$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$______.

16.已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中$a,b$为常数，若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$,则$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$______.

三、解答题

17. 设曲线$L:y=y(x)(x>\mathrm{e})$经过点$(\mathrm{e}^2,0)$,L上任一点$P(x,y)$到y轴的距离等于该点处的切线在y轴上的截距.

(1) 求$y(x)$;

(2)在L上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积.

18. 求函数$f(x,y)=x\mathrm{e}^{\cos y}+\dfrac{x^2}{2}$的极值.

19.已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge 1\}$.

(1)求 D 的面积；

(2)求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

20.(12分)设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1, x^2+y^2-xy=2$与直线$y=\sqrt{3}x, y=0$围成，计算$\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

21.（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数，证明：

（1）若 $f(0)=0$，则存在 $\xi \in (-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（2）若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta \in (-a,a)$ 使得

$$\left|f''(\eta)\right| \geq \frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|.$$

22.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ 2x_1-x_2+x_3 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$;

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对称矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.