2023 年全国硕士研究生招生考试（数学三）试题

1.已知函数 $f\left(x,y\right)=\ln\left(y+\left|x\sin y\right|\right)$，则

A. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在.　　B. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在.

C. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在.　　D. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在.

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为

A. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

3.若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0$.　　B. $a>0,b>0$.

C. $a=0,b>0$.　　D. $a=0,b<0$.

4.已知 $a_n<b_n\ (n=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的

A.充分必要条件.　　B.充分不必要条件.

C.必要不充分条件.　　D.既不充分也不必要条件.

5.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=$

A. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$.

6 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2$　　B. $y_1^2-y_2^2$　　C. $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　D. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

7.已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\gamma}=$

A. $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　B. $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　C. $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　D. $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$

8.设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(|X-EX|)=$

A. $\frac{1}{\mathrm{e}}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{\mathrm{e}}$　　D. 1

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自总体 $N(\mu_2,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，且两样本相互独立，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i,S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2$，则

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　B. $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

10. 设 X_1,X_2 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma(\sigma>0)$ 是未知参数.记

$\sigma=a|X_1-X_2|$，若 $E(\sigma)=\sigma$，则 $a=$

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ C. $\sqrt{\pi}$ D. $\sqrt{2\pi}$

二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=$ ________.

12.已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}f(x,y)=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，$f(1,1)=\frac{\pi}{4}$，则 $f(\sqrt{3},3)=$ ________.

13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$ ________.

14.设某公司在 t 时刻的资产为 $f(t)$，从 0 时刻到 t 时刻的平均资产等于 $\frac{f(t)}{t}-t$，假设 $f(t)$ 连续且 $f(0)=0$，则 $f(t)=$ ________.

15.已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ ax_1+bx_2=2 \end{cases}$ 有解，其中 a,b 为常数，若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4$，则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$ ________.

16.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B(1,p), Y\sim B(2,p), p\in(0,1)$，则 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为________.

三、解答题

17. 已知可导函数 $y=y(x)$ 满足 $ae^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$，且 $y(0)=0$，$y'(0)=0$.

(1)求 a,b 的值；

(2)判断 $x=0$ 是否为 $y(x)$ 的极值点.

18.已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le y\le \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge 1\}$.

(1)求 D 的面积;

(2)求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

19. 已知平面区域$D=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\le 1\}$.计算二重积分$\iint\limits_D |\sqrt{x^2+y^2}-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

20.（12 分）设函数 $f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

（1）若 $f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（2）若 $f(x)$在（$-a,a$）内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$使得

$$\left|f''(\eta)\right|\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|.$$

21.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$;

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

22.设随机变量变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2},-\infty<x<+\infty$, 令 $Y=e^x$.

（1）求 X 的分布函数;

（2）求 Y 的概率密度;

（3）Y 的期望是否存在?