2019 年考研数学一真题解析

一、选择题，1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.当 $x \to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$

A.1. B.2.

C.3. D.4.

【答案】C

【答案解析】根据泰勒公式有 $x-\tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$，故选 C.

对泰勒不熟悉的同学，本题也可以用洛必达法则.

2.设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x \le 0, \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

A.可导点，极值点. B.不可导点，极值点.

C.可导点，非极值点. D.不可导点，非极值点.

【答案 B】

【答案解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x-0}{x}$ 不存在（极限为无穷属于极限不错在），故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点.且当 $x<0, f(x)<0;0<x<1, f(x)<0且f(0)=0$，由极值定义可知，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，故选 B.

3.设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$. B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$.

【答案】D

【答案解析】

选项 A：u_n 单调递增有界，知 $\{u_n\}$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = u \ne 0$，也就是 n 趋近无穷时，

$\dfrac{u_n}{n} \sim \dfrac{1}{n}$，故根据极限形式的比较审敛发，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 同敛散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故选项

A 发散。本选项也可举反例 $u_n=\arctan n$；

选项 B：u_n 单调递增有界，知 $\{u_n\}$ 收敛.故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u\neq 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}\neq 0$，由数列收敛的必要条件可知 B 发散。本选项也可举反例 $u_n=\arctan n$；

选项 C：该选项最具迷惑性，一般项趋近 0，是正项级数，单调减.但这种正项级数是否收敛取决于递减的速度。比如举反例 $u_n=\frac{n}{n+1}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$，根据极限形式的比较审敛法，该级数与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 同敛散，因此发散。

选项 D：由题意可知，选项 D 为正项级数.又由于 $\{u_n\}$ 有界，即存在M，使得$|u_n|\le M$，

$\left|u_{n+1}^2-u_n^2\right|=|u_{n+1}+u_n||u_{n+1}-u_n|\le 2M\ (u_{n+1}-u_n)$，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_2-u_1+u_3-u_2+\ldots+u_{n+1}-u_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}-u_1\le M-u_1$，因此，根据比较审敛法可知级数 D 收敛。当然也可以一开始就使用裂项相消，也能证明其收敛.

4.设函数 $Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$，如果对上半平面（$y>0$）内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，那么函数 $P(x,y)$ 可取为

A. $y-\frac{x^2}{y^3}$.　　　　B. $\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}$.

C. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.　　　　D. $x-\frac{1}{y}$.

【答案】D

【答案解析】由题意可知 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$ 且要保证对于上半平面任意光滑闭曲线都成立，故也包含 x=0 一条线，故选 D。A、B 偏导数不符合，C 在 x=0 处不连续，不成立。

5.设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵.若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx

的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

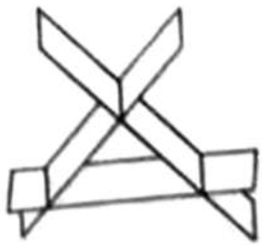
C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

【答案】C

【答案解析】由 $A^2+A=2E$ 可知，矩阵的特征值满足

$\lambda^2+\lambda=2$，所以A的两个特征值为$-2,1$; 又知道行列式等于所有特征值的乘积，故矩阵的第三个特征值为-2，所以二次型的正、负惯性指数分别为 1，2.故选 C.

6.如图所示，有 3 张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程



$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则

A. $r(A)=2,r(\overline{A})=3$.

B. $r(A)=2,r(\overline{A})=2$.

C. $r(A)=1,r(\overline{A})=2$.

D. $r(A)=1,r(\overline{A})=1$.

【答案】A

【答案解析】由图像可知平面两两分别相交，所以系数矩阵的秩大于等于 2，又因为三个平面没有共同的交线，所以方程组无解，所以增广矩阵的秩为 3.其相关知识如下：

设平面 π_1 π_2 π_3 的方程所组成的线性方程组（下简称方程组）的系数矩阵和增广矩阵分别为 A 和 $\overline{A}$.下面根据线性代数和解析几何知识讨论其位置关系.因秩 $\overline{A}\geq$ 秩 A，秩 $\overline{A}\leq 3$,秩 $A\geq1$，故只有下述 6 种不同情况：

（1）秩 $\overline{A}$ =3=秩 A 时.

●方程组有唯一解，三平面交于一点,下图（1）.

（2）秩 $\overline{A}=3$，秩 $A=2$ 时，因秩 $\overline{A}>$ 秩 A，方程组误解，因而 3 平面无交点·但因秩 $A=2$,必有两平面相交.又秩 $\overline{A}=3$,3个平面又互异，于是可能有：

●3平面两两相交，下图（2）.

●3平面中有两平面相交，另一平面与其中一平面平行，下图（3）.

（3）秩$\overline{A}=3$，秩$A=1$.根据秩的定义易知这不可能.

（4）秩$\overline{A}=2=$秩A时，因秩$\overline{A}=$秩$A=2<n=3$（未知数个数），方程组有无穷多个解，因而3平面有无穷多个交点，又因秩$A=2$,必有两平面相交，秩$\overline{A}=2$,A 说明3平面中至少有2个平面互异，于是可能有：

●两平面相交，另一平面通过这交线，但 3 平面互异，下图 4）.

●两平面相交，另一平面与其中一平面重合，两平面互异，下图（5）.

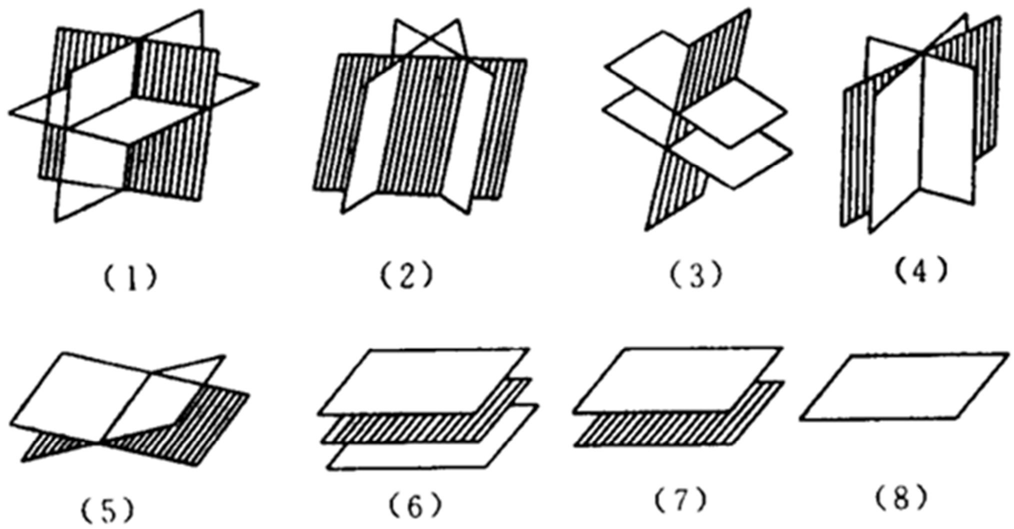
（5）.秩$\overline{A}=2$,秩$A=1$时,秩$\overline{A}>$秩A,故方程组无解,3平面不相交.又因秩$A=1$,且没有两平面相交,因而3平面平行.再因秩$\overline{A}=2$,3平面中至少有两平面互异.于是可能有.

●3平面平行，且3平面互异，下图（6）.

●3平面平行，其中有两平面重合，这时有两平面互异，下图（7）.

（6）秩$\overline{A}=1=$秩A时，因秩$\overline{A}=$秩$A=1<n=3$，方程组有无穷多个解.3平面有无穷多个交点，由秩$A=1$知，没有两平面相交.而秩$\overline{A}=1$,说明3平面中至少有1个平面互异.如果有2个或3个平面互异，则它们必平行，这与3平面有无穷多个交点矛盾，于是只有一个不同平面，即

●3个平面重合，下图（8）.



7.设A,B为随机事件，则$P(A)=P(B)$的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.

D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

【答案】C

【答案解析】$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)=P(B)$，故选 C

A 选项是互斥或者叫互不相容。B 选项是独立。D 选项推不出来关系。

8.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$

A.与 μ 无关，而与 σ^2 有关.

B.与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

C.与 μ,σ^2 都有关.

D.与 μ,σ^2 都无关.

【答案】A

【答案解析】$E(X-Y)=\mu-\mu=0,D(X-Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=\sigma^2+\sigma^2=2\sigma^2$，

因此 $\frac{|X-Y|}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，所以 $P\left\{\frac{|X-Y|}{\sqrt{2}\sigma}<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$，故选 A.

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9.设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$, 则 $\frac{1}{cosx}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{cosy}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$=______.

【答案】$\frac{x}{\cos y}+\frac{y}{\cos x}$

【答案解析】秒杀法：令 $f(u)=1$，则 $z=1+xy$， $\frac{1}{cosx}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{cosy}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$=$\frac{x}{\cos y}+\frac{y}{\cos x}$

正常方法：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot(-\cos x)+y;\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\cos y+x$，故

$\frac{1}{cosx}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{cosy}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$=$\frac{x}{\cos y}+\frac{y}{\cos x}$

10.微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$______.

【答案】 $y=\sqrt{3e^x-2}$

【答案解析】分离变量得 $\int\frac{2y}{y^2+2}dy=\int xdx\Rightarrow\ln(y^2+2)=x+C_1\Rightarrow y^2+2=Ce^x$

代入初值可得 C=3，故 $y=\sqrt{3e^x-2}$

11.幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$______.

【答案】 $S(x)=\cos\sqrt{x}$

【答案解析】由 $\sum\limits_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{(2n)!}(\sqrt{x})^2=\cos\sqrt{x}$

12.设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geq0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=$________.

【答案】 $\frac{32}{3}$

【答案解析】由题意可知：$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=\iint\limits_{\Sigma}|y|dxdy=\iint\limits_{D}|y|dxdy$

其中 $D:x^2+y^2=4$ 由二重积分得对称性 $\iint\limits_{D}|y|dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^2r^2dr=\frac{32}{3}$

13.设 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 为 3 阶矩阵.若 α_1，α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为________.

【答案】 $x=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$k\in R$

【答案解析】因为 $r(A)\geq2$ 且方程组有解故 $r(A)\leq2\Rightarrow r(A)=2$，且由 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$ 可知：$\alpha_3+\alpha_1-2\alpha_2=0$，即 $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$，所以 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 为方程组的基础解系，

所以通解为$x=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},k\in R$

14.设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ,0<x<2\\ 0 & ，其他，\end{cases}$，$F$（$x$）为$X$的分布函数，$EX$为$X$的数学期望，则$P\{F（X）>EX-1\}=$________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【答案解析】X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$EX=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}|_1^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$P\{F(X)\ge EX-1\}=P\{F(X)\ge\frac{1}{3}\}=P\{X\ge 2\}=P\{\frac{2}{\sqrt{3}}<X<2\}$$

$$=P\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}<X<2\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}\bigg|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}=\frac{2}{3}$$

三、解答题：15~23小题，共94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分10分）

设函数$y(x)$是微分方程$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(0)=0$的特解.

(1)求$y(x)$；

(2)求曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

【答案解析】(1) $y(x)=e^{-\int xdx}(\int e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\int xdx}dx+C)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x+C),\because y(0)=0\Rightarrow C=0$

所以$y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

(2)求导得：$y''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)=0$，由于指数函数部分恒大于0，因此讨论幂函数即可。所以函数的拐点为$(0,0),(\sqrt{3},e^{-\frac{3}{2}}),(-\sqrt{3},e^{-\frac{3}{2}})$

二阶导大于 0，函数为凹，因此凹区间为：$x\in(-\sqrt{3},0)$以及$(\sqrt{3},+\infty)$；

二阶导小于 0，函数为凸，因此凸区间为：$x\in(-\infty,-\sqrt{3})$以及$(0,\sqrt{3})$.

$e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)=0$，所以函数的拐点为$(0,0),(\sqrt{3},e^{-\frac{3}{2}}),(-\sqrt{3},e^{-\frac{3}{2}})$

16.（本题满分 10 分）

设a,b为实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点（3，4）处的方向导数中，沿方向$l=-3i-4j$的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求a,b；

（2）求曲面$z=2+ax^2+by^2$（$z\geq 0$）的面积.

【答案解析】(1) $z'_x=2ax,z'_y=2by,$，在点（3，4）处的梯度为$6ai,8bj$，因该梯度与$l=-3i-4j$同向；最大值为 10 也就是梯度的模长为 10，也就是最大方向导数为 10，可

得$\begin{cases}\dfrac{6a}{8b}=\dfrac{-3}{-4}\\ -\dfrac{18a}{5}-\dfrac{32b}{5}=10\end{cases}\Rightarrow a=b=-1$

(2)方法一：该曲面$z=2-x^2-y^2$为一个倒扣的碗形。可看做$z=2-x^2$绕 z 轴旋转生成的。

可根据切土豆片法，

$$S=\int_0^{\sqrt{2}}2\pi x\sqrt{1+(-2x)^2}dx=\frac{13\pi}{3}$$

方法二：该曲面$z=2-x^2-y^2$为一个倒扣的碗形。根据重积分的应用知识，

设区域$D=\{x,y\,|\,x^2+y^2\leq 2\}$

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,rdr=\frac{13\pi}{3}$$

17.求曲线$y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$与 x 轴之间图形的面积.

【答案解析】

$$S=\int_0^{+\infty}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x}\sin xdx-\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}e^{-x}\sin xdx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[e^{-2n\pi}+e^{-(2n+1)\pi}]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[e^{-(2n+2)\pi}+e^{-(2n+1)\pi}]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-\pi}}+\frac{1}{2}\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

18.设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$，n=（0，1，2…）

（1）证明数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$（n=2，3…）

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

【答案解析】(1)令 $x=\sin t$， $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos t^2 dt, a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\cos t^2 dt$

$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n+1}t-\sin^n t)\cos t^2 dt<0$， 故数列 $\{a_n\}$ 单调减少.

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos t^2 dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}tdt$$

且由分部积分法可计算得 $a_n=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}tdt$， $a_{n\text{-}2}=\frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt$

所以 $(n-1)a_{n-2}-(n+1)a_n=a_n\Rightarrow a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$

（2）由于数列单调递减，所以 $\frac{n-1}{n+2}=\frac{a_n}{a_{n-2}}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$=1

19.设 Ω 是锥面 $x^2+(y-2)^2=(1-z)^2(0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

【答案解析】由圆锥的对称性可知：形心坐标： $x=0, y=2$

$$z=\frac{\iiint\limits_v zdv}{\iiint\limits_v dv}=\frac{\int_0^1 zdz\iint\limits_{D:xy}dxdy}{\int_0^1 zdz\iint\limits_{D:xy}dxdy}=\frac{\pi\int_0^1 z(1-z)^2dz}{\pi\int_0^1(1-z)^2dz}=\frac{1}{4}$$ ，故形心坐标为 $(0,2,\frac{1}{4})$.

20.设向量组 $\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(1,3,2)^T,\alpha_3=(1,a,3)^T$，为 R^3 的一个基， $\beta=(1,1,1)^T$ 在这个

基下的坐标为$(b,c,1)^T$.

（1）求a,b,c.

（2）证明a_2,a_3，β为R^3的一个基，并求a_2,a_3,β到a_1,a_2,a_3的过度矩阵.

【答案解析】(1)由题意可知，$\beta=b\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3$即：$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}\Rightarrow$

$a=3,b=2,c=-2$

(2)证明：因为$r\begin{pmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{pmatrix}=3$，故$a_2,a_3$，$\beta$为$R^3$的一个基.

或者$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=2\neq0$，故$a_2,a_3$，$\beta$为$R^3$的一个基.

过度矩阵的求解

方法一：$P=(\alpha_2,\alpha_3,\beta)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$

方法二：

$$(\alpha_2,\alpha_3,\beta)=(\alpha_2,\alpha_3,2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$,

因此过度矩阵为$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$

21.已知矩阵 $A=\begin{Bmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{Bmatrix}$ 与 $B=\begin{Bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{Bmatrix}$ 相似

（1）求 x,y.

（2）求可可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B.$

【答案解析】(1)由题意可知 $\lambda_B=2,-1,y,A\sim B$，所以 $\lambda_A=2,-1,y$

$|\lambda E-A|=(\lambda+2)[(\lambda+2)(\lambda-x)+4]=0,$ 所以 $y=-2$，

当 $\lambda=2$ 为 $(\lambda+2)(\lambda-x)+4=0$ 的根，所以 $x=3$

(2)计算得

A 的特征值为 $2,-2,1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

令 $P_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$，则 $P_1^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

同理可计算：

B 的特征值为 $2,-2,1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$，令 $P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

则 $P_2BP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

所以 $P_1AP=P_2BP=P\Rightarrow P=P_2P_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

22.设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为

$P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p,(0<p<1),$ 令 $Z=XY$

（1）求 z 的概率密度.

（2）p 为何值时，X 与 Z 不相关.

（3）X 与 Z 是否相互独立?

【答案解析】(1) Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$$
$$=P(XY\le z,Y=-1)+P(XY\le z,Y=1)$$
$$=pP(X\ge -z)+(1-p)P(X\le z)$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=p\int_{-z}^{+\infty}e^{-x}dx=pe^{z}$

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=p+(1-p)\int_0^{z}e^{-x}dx=p+(1-p)(1-e^{z})$

所以 $p(z)=\begin{cases}pe^{z}, & z<0\\ (1-p)e^{-z}, & z\ge 0\end{cases}$

（2）

$EX=1, EY=1-2p$

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=(DX+(EX)^2)(1-2p)=2(1-2p)$

$E(X)E(Z)=p\int_{-\infty}^{0}ze^{z}dz+(1-p)\int_0^{+\infty}ze^{-z}dz=1-2p$

若不相关则 $E(XZ)=(EX)(EZ), 1-2p=0, p=\dfrac{1}{2}$.

(3)若 $p\ne\dfrac{1}{2}$,则不独立；

若$p=\dfrac{1}{2}$,

$P(X\le 1,Z\le 1)=P(X\le 1,XY\le 1)=P(X\le 1,Y=1)+P(X\le 1,Y=-1)=1-e^{-1}$

$P(X\le 1)=1-e^{-1}, P(Z\le 1)\ne 1$，故$P(X\le 1,Z\le 1)\ne P(X\le 1)P(Z\le 1)$

所以 X 与 Z 不相互独立.

同学们也可验证其他点，比如

$P\{X\le 1,Z\le -1\}=0$

而$P\{X\le 1\}=1-e^{-1}, P\{Z\le -1\}=pe^{-1}$,故不独立

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} & x\ge\mu,\\ 0 & x<\mu,\end{cases}$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，X_1，$X_2,\dots X_n$ 来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求 A；

(2)求 σ^2 的最大似然估计量.

【答案解析】(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\sqrt{2}A\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

（2）似然函数为

$$L=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\cdot\frac{1}{\sigma^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2}$$ 取对数得：

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2$$

两边对 σ^2 求偏导得：

$$-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2=0$$

$\Rightarrow$ σ^2 的最大似然估计量为: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2$.