2019 年考研数学三真题解析

一、选择题 1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（C）

【详解】当 $x \to 0$ 时，$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，所以 $x - \tan x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，所以 $k = 3$．

2．已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有三个不同的实根，则 k 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty, -4)$　　（B）$(4, +\infty)$　　（C）$(-4, 0)$　　（D）$(-4, 4)$

【答案】（D）

【详解】设 $f(x) = x^5 - 5x + k$，则 $f(-\infty) = -\infty, f(+\infty) = +\infty, f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2+1)(x+1)(x-1),$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 且 $f''(-1) = -20, f''(1) = 20$，也就是函数在 $x_1 = -1$ 处取得极大值 $f(-1) = 4 + k$，在 $x_2 = 1$ 处取得极小值 $f(1) = k - 4$；

由于方程有三个不同实根，必须满足 $\begin{cases} f(-1) = 4 + k > 0 \\ f(1) = k - 2 < 0 \end{cases}$，也就得到 $k \in (-4, 4)$．

3．已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$，则 a, b, c 依次为（　　）

（A）$1, 0, 1$　　（B）$1, 0, 2$　　（C）$2, 1, 3$　　（D）$2, 1, 4$

【答案】（D）

【详解】（1）由非齐次线性方程的通解可看出 $r_1 = r_2 = -1$ 是特征方程 $r^2 + ar + b = 0$ 的实根，从而确定 $a = 2, b = 1$；

（2）显然，$y^* = e^x$ 是非齐次方程的特解，代入原方程确定 $c = 4$．

4．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛，则（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛　　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 发散

【答案】（B）

【详解】由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛，则 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{v_n}{n} = 0$，也就是有界；

从而，$|u_n v_n| = \left| nu_n \cdot \frac{v_n}{n} \right| \le M |nu_n|$，**由正项级数的比较审敛法，** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛．

5．设 A 是四阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，若线性方程组 $Ax = 0$ 基础解系中只有两个向量，则 $r(A^*) =$（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】（A）

【详解】线性方程组 $Ax=0$ 基础解系中只有两个向量，也就是 $4-r(A)=2 \Rightarrow r(A)=2<n-1=3$，

所以 $r(A^*)=0$.

6．设 A 是三阶实对称矩阵，E 是三阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 $x^T Ax$ 的规范形是　（　　）

（A） $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　**（B）** $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　**（C）** $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　**（D）** $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】（C）

【详解】假设 λ 是矩阵 A 的特征值，由条件 $A^2+A=2E$ 可得 $\lambda^2+\lambda-2=0$，也就是矩阵 A 特征值只可能是 1 和 -2．而 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，所以三个特征值只能是 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$，根据惯性定理，二次型的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

7． 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是　（　　）

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$

（C）$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　（D）$P(AB)=P(\overline{AB})$

【答案】（C）

【详解】选项（A）是 A,B 互不相容；选项（B）是 A,B 独立，都不能得到 $P(A)=P(B)$；

对于选项（C），显然，由 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，

$$P(A\overline{B})=P(B\overline{A}) \Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB) \Leftrightarrow P(A)=P(B)$$

8．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．则 $P\{|X-Y|<1\}$（　　）

（A）与 μ 无关，而与 σ^2 有关　（B）与 μ 有关，而与 σ^2 无关

（C）与 μ，σ^2 都有关　（D）与 μ，σ^2 都无关

【答案】（A）

【详解】由于随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，从而

$$P\{|X-Y|<1\}=P\{-1\le X-Y<1\}=P\{\frac{-1}{\sqrt{2}\sigma}\le\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\le\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$$

只与 σ^2 有关.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)^n=$ ________.

【答案】e^{-1}

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$

10．曲线 $y=x\sin x+2\cos x$ $(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2})$ 的拐点坐标是（　　）

【答案】$(\pi,-2)$

【详解】$y=x\sin x+2\cos x$ ，$y'=x\cos x-\sin x$，$y''=-x\sin x$，$y'''=-\sin x-x\cos x$；

令 $y''=-x\sin x=0$ 得 $x_1=0,x_2=\pi$，且 $f'''(\pi)\neq 0$，所以 $(\pi,-2)$ 是曲线的拐点；

而对于点 $(0,0)$，由于 $f'''(0)=0$，而 $f^{(4)}(0)\neq 0$，所以不是曲线的拐点.

11．已知函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt$，则 $\int_0^1 x^2f(x)dx=$ ________.

【答案】$\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$.

【详解】(1）用定积分的分部积分：

$$\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx^3=\frac{1}{3}x^3f(x)|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}dx=-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+x^4}d(1+x^4)=\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$$

（2）转换为二重积分：

$$\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2dx\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt=-\int_0^1\sqrt{1+t^4}dt\int_0^t x^2dx=-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3\sqrt{1+t^4}dt=\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$$

12．以 P_A,P_B 分别表示 A,B 两个商品的价格．设商品 A 的需求函数 $Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$，则当 $P_A=10,P_B=20$ 时，商品 A 的需求量对自身价格弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)=$ ________.

【答案】0.4

【详解】$Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$，当 $P_A=10,P_B=20$ 时，$Q_A=1000$ 则边际需求 $\frac{\partial Q_A}{\partial P_A}=-2P_A-P_B$，

商品 A 的需求量对自身价格弹性为 $\eta_{AA}=\frac{EQ_A}{EP_A}=\left|\frac{P_A}{Q_A}\cdot\frac{\partial Q_A}{\partial P_A}\right|=\frac{10}{1000}\times 40=0.4$.

13．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$．若线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $a=$____________．

【答案】 1．

【详解】 对线性方程组的增广矩阵进行初等行变换：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&1&a^2-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&a^2-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{pmatrix}$$

显然，当且仅当 $a=1$ 时，$r(A)=r(A,b)=2<3$ 线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解．

14．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2\\0,\ \text{其他}\end{cases}$，$F(x)$ 为其分布函数，$E(X)$ 其数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$________．

【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

【详解】 $F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\\dfrac{1}{4}x^2, 0\le x<2\\1, & x\ge 2\end{cases}$，$E(X)=\int_0^2\dfrac{x^2}{2}dx=\dfrac{4}{3}$．

$$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\{F(X)>\frac{1}{3}\}=P\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\}=1-\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{x}{2}dx=\frac{2}{3}.$$

三、解答题

15．（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x} & ,x>0\\xe^x+1,x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$，并求函数 $f(x)$ 的极值．

【详解】 当 $x>0$ 时，$f(x)=x^{2x}=e^{2x\ln x}$，$f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=xe^x+1$，$f'(x)=(x+1)e^x$；

在 $x=0$ 处，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x^{2x}(\ln x-1)}{1}=-\infty$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导．

综合上述：$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1),x>0\\(x+1)e^x, & x<0\end{cases}$；

令 $f'(x)=0$ 得到 $x_1=-1,x_2=\dfrac{1}{e}$．

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$；

故 $x_1=-1$ 是函数的极小值点，极小值为 $f(-1)=1-e^{-1}$； $x=0$ 是函数的极大值点，极大值为 $f(0)=1$；

$x_2=\frac{1}{e}$ 是函数的极小值点，极小值为 $f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

16．（本题满分 10）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，函数 $z=xy-f(x+y,x-y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-f_{11}''-f_{12}''-f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}''$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-f_{11}''+f_{22}''$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1-3f_{11}''-f_{22}''.$$

17．（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

（1）求 $y(x)$ 的表达式；

（2）设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

【详解】（1）这是一个一阶线性非齐次微分方程.

先求解对应的线性齐次方程 $y'-xy=0$ 的通解：$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$，其中 C 为任意常数；

再用常数变易法求 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 通解，设 $y=C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ 为其解，代入方程，得

$C'(x)e^{\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}},C'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$C(x)=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+C_1$，也就是通解为：$y=(\sqrt{x}+C_1)e^{\frac{x^2}{2}}$

把初始条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 代入，得 $C_1=0$，从而得到 $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

（2）旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_1^2 y(x)^2dx=\pi\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$.

18．（本题满分 10 分）求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ \ (x\ge 0)$ 与 x 轴之间形成图形的面积.

【详解】先求曲线与 x 轴的交点：令 $e^{-x}\sin x=0$ 得 $x=k\pi,k=0,1,2,\cdots$

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y=e^{-x}\sin x>0$；当 $2k\pi+\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y=e^{-x}\sin x<0$.

由不定积分 $\int e^{-x}\sin xdx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ 可得

$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}e^{-x}\sin xdx=\frac{1}{2}e^{-2k\pi}(1+e^{-\pi})$，$\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi}e^{-x}\sin xdx=-\frac{1}{2}e^{-2k\pi-\pi}(1+e^{-\pi})$

所求面积为

$$
\begin{aligned}
S=\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|dx&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}e^{-x}\sin xdx-\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi}e^{-x}\sin xdx\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-2k\pi}(1+e^{-\pi})+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-2k\pi-\pi}(1+e^{-\pi})\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k\pi}(1+e^{-\pi})^2=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})^2\frac{1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}
\end{aligned}
$$

19.（本题满分 10 分）设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\quad(n=2,3,\cdots)$；（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

【详解】（1）证明：$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$ ，$a_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$

当 $x\in(0,1)$ 时，显然有 $x^{n+1}<x^n$，$a_{n+1}-a_n=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)\sqrt{1-x^2}dx<0$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调减少；

先设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n dx,n=0,1,2,\cdots$

则当 $n\ge 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx\\
&=(n-1)(I_{n-2}-I_n)
\end{aligned}
$$

也就是得到 $I_n=\frac{n+2}{n+1}I_{n+2},n=0,1,\cdots$

令 $x=\sin t,t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}tdt=I_n-I_{n+2}=\frac{1}{n+2}I_n$$

同理，$a_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\frac{1}{n-1}I_n$

综合上述，可知对任意的正整数 n，均有 $\frac{a_n}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{n+2}$，即 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\quad(n=2,3,\cdots)$；

（2）由（1）的结论数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\quad(n=2,3,\cdots)$

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\frac{n-1}{n+2}a_{n-1}\Rightarrow 1>\frac{a_n}{a_{n-1}}>\frac{n-1}{n+2}$$

令$n\to\infty$，由夹逼准则，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

20.（本题满分 11 分）

已知向量组 I：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$；

向量组 II：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 I 和向量组 II 等价，求常数$a$的值，并将$\beta_3$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

【**详解**】向量组 I 和向量组 II 等价的充分必要条件是

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

（1）当$a=1$时，显然，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，两个向量组等价.

此时，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$的通解为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，也就是

$\beta_3=(-2k+3)\alpha_1+(k-2)\alpha_2+k\alpha_3$，其中$k$为任意常数；

（2）当$a\neq1$时，继续进行初等行变换如下：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a+1&1&-1&a+1\end{pmatrix}$$

显然，当$a\neq-1$且$a\neq1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，

同时 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\1&-1&a+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，也就是

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，两个向量组等价.

这时，β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，表示法唯一：$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

21.（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 x,y 之值；（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

【详解】（1）由矩阵相似的必要条件可知：$\begin{cases}|A|=|B|\\trA=trB\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2(-2x+4)=-2y\\-4+x=1+y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$.

（2）解方程组 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&2&-1\\-2&\lambda-3&2\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ 得矩阵 A 的三个特征值

$\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$；

分别求解线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0\quad(i=1,2,3)$ 得到分属三个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$ 的线性无关的特征向量为：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$.

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，则 P_1 可逆，且 $P_1^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$；

同样的方法，可求得属于矩阵 B 的三个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$ 的线性无关的特征向量为：

$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\14\end{pmatrix}$.

令 $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 P_2 可逆，且 $P_2^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$；

由前面 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$，可知令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，就满足 $P^{-1}AP=B$.

22．（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为：$P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$，$(0<p<1)$．令 $Z=XY$．

（1）求 Z 的概率密度；（2）p 为何值时，X,Z 不相关；（3）此时，X,Z 是否相互独立.

【详解】（1）显然 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x},x>0\\0,\ x\le 0\end{cases}$.

先求 $Z=XY$ 的分布函数：

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}&=P\{X\le z,Y=1\}+P\{X\ge -z,Y=-1\}\\&=(1-p)P\{X\le z\}+pP\{X\ge -z\}\\&=(1-)\ F_X(z)+p(1-F_X(-z))\end{aligned}$$

再求 $Z=XY$ 的概率密度：

$$f_Z(z)=(F_Z(z))'=pf_X(-z)+(1-p)f_X(z)=\begin{cases}pe^z, & z<0\\0, & z=0\\(1-p)e^{-z}, & z>0\end{cases}$$

（2）显然 $E(X)=1,D(X)=1;E(Y)=1-2p$；

由于随机变量 X,Y 相互独立，所以 $E(Z)=E(XY)=E(X)E(Y)=1-2p$；

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=2-4p$；$COV(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1-2p$；

要使 X,Z 不相关，必须 $COV(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1-2p=0$，也就是 $p=0.5$ 时 X,Z 不相关；

（3）X,Z 显然不相互独立，理由如下：设事件 $A=\{X>1\}$，事件 $B=\{Z<1\}$，则

$P(A)=P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-1}$；

$P(B)=P\{Z<1\}=P\{X>-1,Y=-1\}+P\{X<1,Y=1\}=1-\frac{1}{2}e^{-1}$；

$P(AB)=P\{X>1,Z<1\}=P\{X>1,XY<1\}=P(X>1,Y<\frac{1}{x}\}=P\{X>1\}\cdot P\{Y=-1\}=pe^{-1}$，当 $p=0.5$ 时，显然 $P(AB)\ne P(A)P(B)$，也就是 X,Z 显然不相互独立.

23．（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\ge\mu\\0,\quad x<\mu\end{cases}$，其中 μ 是已知参数，σ 是未知

参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求常数 A 的值；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

【详解】（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 可知 $\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{2}A\int_0^{+\infty}e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}d\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}A=1$

所以 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

似然函数为 $L(X_1,X_2,\cdots X_n;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\begin{cases}\frac{A^n}{\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x_i\geq\mu \\ 0, \quad 其他\end{cases}$，

取对数，得 $\ln L(X_1,X_2,\cdots,X_n;\sigma^2)=n\ln A-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

解方程 $\frac{d\ln L(X_1,X_2,\cdots,X_n;\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=0$，得未知参数 σ^2 的最大似然估计量为 $\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.