一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. $x\to0^{+}$时，下列无穷小阶数最高的是

A. $\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt$

B. $\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$

C. $\int_0^{\sin x}\sin t^2dt$

D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt$

1.答案：D

解析：A. $\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt\sim\int_0^x t^2dt=\frac{x^3}{3}$

B. $\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt\sim\int_0^x t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

C. $\int_0^{\sin x}\sin t^2dt\sim\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3$

D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2}t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot x^5$

2.设函数 $f(x)$ 在区间（-1，1）内有定义，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 则（　　）

A.当 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$, $f(x)$在$x=0$ 处可导.

B.当 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$, $f(x)$在$x=0$ 处可导.

C.当 $f(x)$在$x=0$处可导时, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D.当 $f(x)$在$x=0$处可导时, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$.

2.答案：B

解析 $\because \lim f(x) = 0$; $\lim f(x) = 0$; $\lim f(x) = 0$ $\lim f(x) = 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0, \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0=f'(0)$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\therefore$ 选 B

3.设函数 $f(x,y)$ 在点（0，0）处可微，$f(0,0)=0, \boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{(0,0)}$ 且非零向量 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，则（　　）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{d}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{d}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

3.答案：A

解析：

$\because f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. $f(0,0)=0$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\cdot x-f_y'(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

即 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f_x'(0,0)\cdot x-f_y'(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$$\because n\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y-f(x,y)$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|n\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \text{ 存在}$$

$\therefore$ 选 A.

4.设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，r 是实数，则（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散时，$|r| \geq R$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散时，$|r| \leq R$

C. $|r| \geq R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散

D. $|r| \leq R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散

4.答案：A

解析：

$\because R$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内必收敛.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散时，$|r| \geq R$.

$\therefore$ 选 A.

5.若矩阵 A 经初等列变换化成 B，则（　　）

A.存在矩阵 P，使得 $PA=B$

B.存在矩阵 P，使得 $BP=A$

C.存在矩阵 P，使得 $PB=A$

D.方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

5.答案：B

解析：

$\because$ A 经初等列变换化成 B.

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P_1 使得 $AP_1 = B$

$\therefore A = BP_1^{-1}$ 令 $P = P_1^{-1}$

$\therefore A = BP. \therefore$ 选 B.

6.已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{} = \frac{y-b_2}{} = \frac{2-c_2}{}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{} = \frac{y-b_3}{} = \frac{2-c_3}{}$ 相交于一点，法

向量 $a_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i=1,2,3.$ 则

A. a_1 可由 a_2, a_3 线性表示

B. a_2 可由 a_1, a_3 线性表示

C. a_3 可由 a_1, a_2 线性表示

D. a_1, a_2, a_3 线性无关

6.答案：C

解析：

令 L_1 的方程 $\frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1} = t$

即有 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \alpha_2 + t\alpha_1$

由 L_2 的方程得 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha_3 + t\alpha_2$

由直线 L_1 与 L_2 相交得存在 t 使 $\alpha_2 + t\alpha_1 = \alpha_3 + t\alpha_2$

即 $\alpha_3 = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$， α_3 可由 α_1, α_2 线性表示，故应选 C.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0$

$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{12}$

7.答案：D

解析：$P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\overline{BUC})=P(A)-P[A(BUC)]$

$$=P(A)-P(AB+AC)$$
$$=P(A)+P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$$

$$P(B\bar{A}\bar{C})=P(B\overline{AUC})=P(B)-P[B(AUC)]$$
$$=P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$$

$$P(C\bar{B}\bar{A})=P(C\overline{BUA})=P(C)-P[CU(BUA)]$$
$$=P(C)-P(CB)-P(CA)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{12}$$

$$P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

选择 D

8.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2},\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right)$ 的近似值为

A. $1-\Phi(1)$

B. $\Phi(1)$

C. $1-\Phi(2)$

D. $\Phi(2)$

8.答案：B

解析：由题意 $EX=\frac{1}{2},DX=\frac{1}{4}$

$$E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100EX = 50 \qquad D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100DX = 25$$

由中心极限定理 $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50,25)$

$$\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \le 55\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 55}{5} \le \frac{55-50}{5}\right\} = \Phi(1)$$

故选择 B

二、填空题：9—14 小题，每小题 2 分，共 24 分。请将解答写在答题纸指定位置上.

9. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right] =$

9. 解析：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \mathrm{e}^x + 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x} - \mathrm{e}^x}{2x}$$

$$= -1$$

10.设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} =$

10.解析：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

得 $\left.\frac{dy^2}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0),$ 且$f(0)=m,f'(0)=n$ ，则 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=$

11.解析：

特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$ 特征根为 λ_1,λ_2 ，则 $\lambda_1+\lambda_2=-a,\lambda_1\cdot\lambda_2=1$ ，特征根 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]\mathrm{d}x$$

$$=-[f'(x)+af(x)]|_0^{+\infty}$$

$$=n+am$$

12.设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t$ ，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$

12.解析：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{x(xy)^2}\cdot x=x\mathrm{e}^{x^3y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^3y}+3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\mathrm{e}+3\mathrm{e}=4\mathrm{e}.$$

13.行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$

13.解析：

$$\begin{vmatrix}0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a & a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & a & -1+a^2 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a & a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a & -1+a^2 & 1\\ a & 1 & -1\\ 0 & a & a\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}a & a^2-2 & 1\\ a & 2 & -1\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^4-4a^2.$$

14.设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$

14.解析：

解 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$$

$$=E(X\sin X)-EXE(\sin X)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\frac{1}{\pi}dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}xdx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\sin xdx$$

$$=2\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx-0$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x)d\cos x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{2}{\pi}$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答写出文字说明、证

明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的最大值

15.解析：

求一阶导可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{6}\\ y=\dfrac{1}{12}\end{cases}$

求二阶导可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 y}=-1\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y$$

当 $x=0,y=0$时. $A=0.B=-1.C=0$

$AC-B^2<0$ 故不是极值.

当 $x=\dfrac{1}{6}y=\dfrac{1}{12}$时

$A=1.B=-1.C=4.$

$AC-B^2>0.A=1>0$故$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$是极小值点

极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+8\left(\dfrac{1}{12}\right)^3-6\times\dfrac{1}{12}=-\dfrac{1}{216}$

16.（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\dfrac{x+y}{4x^2+y}dy$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向

16.解析：

设 $P=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}$

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ∂P $-4x^2+y^2-8xy$

取路径 $L\varepsilon: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$，方向为顺时针方向.

则 $\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$

$=\int_{L+L\varepsilon} \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy-\int_{L\varepsilon} \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$

$=\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon^-}(4x-y)dx+(x+y)dy$

$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_D [1-(-1)]dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2S_{D_\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}=\pi.$

17.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_n+1=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$，证明：当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=1}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

17.证明：由 $(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n, a_1=1$ 知 $a_n>0$

则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}<1$，即 $a_{n+1}<a_n$

故 $\{a_n\}$ 单调递减且 $0<a_n<1$，故 $\left|a_nx^n\right|<\left|x^n\right|$

当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 绝对收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}+\frac{1}{2}S(x)$$

$$=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)$$

则 $(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)=1$ 即 $S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{1-x}$

解得 $S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(-2\sqrt{1-x}+c\right)$

又 $S(0)=0$ 故 $c=2$ 因此 $S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2.$

18.（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}\left(\le x^2+y^2\le 4\right)$ 的下侧，$f(x)$ 是连续函数，计算

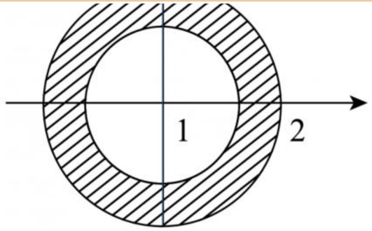
$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2xy-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$$

18. 解析：

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 则 $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

于是



$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}\left\{[xf(xy)+2xy-y]\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+[yf(xy)+2y+x]\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-[zf(xy)+z]\right\}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{2x^2y-xy+2y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_{D_1}\left(\frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{2r^2\sin^2\theta}{r}rdr-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r^2dr\right)$$

$$=4\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{7}{3}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{3}\right)=0.$$

19.设函数 $f(x)$ 在区间[0,2]上具有连续导数， $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in(0,2)}\{|f(x)|\}$，

证明（1）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$

（2）若对任意的 $x\in(0,2),|f'(x)|\leq M$，则 $M=0$.

19.证明：（1）由 $M=\max\{|f(x)|\}$，$x\in[0,2]$ 知存在 $c\in[0,2]$，使 $|f(c)|=M$，

若 $c\in[0,1]$，由拉格朗日中值定理得至少存在一点 $\xi\in(0,c)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{f(c)}{c}$$

从而 $|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{c}=\dfrac{M}{c}\geq M$

若 $c\in(1,2]$，同理存在 $\xi\in(c,2)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(c)}{2-c}=\frac{-f(c)}{2-c}$$

从而 $|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{2-c}=\dfrac{M}{2-c}\geq M$

综上，存在$\xi\in(0,2)$，使$|f'(\xi)|\geq M$.

（2）若$M>0$，则$c\neq 0,2$.

由$f(0)=f(2)=0$及罗尔定理知，存在$\eta\in(0,2)$，使$f'(\eta)=0$,

当$\eta\in(0,c]$时，

$$f(c)-f(0)=\int_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|\leq\int_0^c|f'(x)|\,\mathrm{d}x<Mc,$$

又$f(2)-f(c)=\int_c^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$

$$M=|f(c)|=|f(2)-f(c)|\leq\int_c^2|f'(x)|\,dx\leq M(2-c)$$

于是$2M<Mc+M(2-c)=2M$矛盾.

故$M=0$.

20. 设二次型$f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$经正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$化为二次型$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中$a\geq b$.

（1）求a,b的值.

（2）求正交矩阵Q.

20.解析：

（1）设$A=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a&2\\2&b\end{bmatrix}$

由题意可知$Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ=B$.

$\therefore A$合同、相似于B

$$\therefore\begin{cases}1+4=a+b\\ab=4\end{cases}\quad a\geq b$$

$\therefore a=4.\quad b=1$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda$

$\therefore A$ 的特征值为 0，5

当 $\lambda=0$ 时，解 $(0E-A)x=0$ 得基础解为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

当 $\lambda=5$ 时，解 $(5E-A)x=0$ 得基础解为 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

又 B 的特征值也为 0，5

当 $\lambda=0$ 时，解 $(0E-B)x=0$ 得 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\alpha_2$

当 $\lambda=5$ 时，解 $(5E-B)x=0$ 得 $\beta_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\alpha_1$

对 α_1,α_2 单位化

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

令 $Q_1=[\gamma_1,\gamma_2],Q_2=[\gamma_2,\gamma_1]$

则 $Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&5\end{bmatrix}=Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2$

故 $Q_2Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1Q_2^{\mathrm{T}}=B$

可令

$$Q=Q_1Q_2^{\mathrm{T}}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

21.设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

（1）证明 P 为可逆矩阵

（2）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

21.解析：

(1) $\alpha\neq 0$ 且 $A\alpha\neq\lambda\alpha$.

故 α 与 $A\alpha$ 线性无关.

则 $r(\alpha,A\alpha)=2$

则 P 可逆.

$$AP=A(\alpha,A\alpha)=(A\alpha,A^2x)=(\alpha A\alpha)\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$$

故 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$.

(2)由 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$

设 $(A^2+A-6E)\alpha=0,(A+3E)(A-2E)\alpha=0$

由 $\alpha\neq 0$ 得 $(A^2+A-6E)x=0$ 有非零解

故 $|(A+3E)(A-2E)|=0$

得 $|A+3E|=0$ 或 $|A-2E|=0$

若 $|(A+3E)|\neq 0$ 则有 $(A-2E)\alpha=0$, 故 $A\alpha=2\alpha$, 与题意矛盾

故 $|A+3E|=0$, 同理可得 $|A-2E|=0$.

于是 A 的特征值为 $\lambda_1=-3\ \ \lambda_2=2$.

A 有 2 个不同特征值，故 A 可相似对角化

22.设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2},Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量（X_1，Y）的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

（2）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

22.解析：

$$\begin{aligned}(1)F(x,y)&=P\{X_1\le x,Y\le y\}\\&=P\{X_1\le x,X_3(X_1-X_2)+X_2\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le x,X_3(X_1-X_2)+X_2\le y,X_3=1\}\\&=P\{X_1\le x,X_2\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le x,X_1\le y,X_3=1\}\end{aligned}$$

若 $x\le y$,则$P\{X_1\le x,X_1\le y,X_3=1\}=\frac{1}{2}P\{X_1\le x\}=\frac{1}{2}\Phi(x)$

若 $x>y$,则$P\{X_1\le x,X_1\le y,X_3=1\}=\frac{1}{2}P\{X_1\le y\}=\frac{1}{2}\Phi(y)$

$$故\ F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(x),x\le y\\ \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y),x>y\end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}&F_Y(y)=P\{Y\le y\}\\&=P\{X_3(X_1-X_2)+X_2\le y\}\\&=\frac{1}{2}P\{X_3(X_1-X_2)+X_2\le y\mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_3(X_1-X_2)+X_2\le y\mid X_3=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{X_2\le y\mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\le y\mid X_3=1\}\\&=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)\\&=\Phi(y).\end{aligned}$$

23.设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\ge 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

（1）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$.

（2）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2\cdots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

23.解析：

（1） $P\{T>t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

$P\{T>s+t\mid T>s\}=P\{T>t\}=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

(2) $f(t)=F'(t)=\begin{cases}m\theta^{-m}t^{m-1}.e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i,\theta)=\begin{cases} m^n\theta^{-mn}(t_1\cdots t_n)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}, & t_i\ge 0 \end{cases}$

当 $t_1\ge 0,t_2\ge 0,\cdots,t_n\ge 0$ 时

$$L(\theta)=m^n\theta^{-mn}\left(t_1\cdots t_n\right)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$$

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m+1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^{m}$

求导数 $\dfrac{d\ln(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{mn}{\theta}+m\theta^{-(m+1)}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$

令 $\dfrac{d\ln(\theta)}{d\theta}=0$ 解得 $\theta=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$

所以 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$