# 2022 年全国硕士研究生招生考试

# 数　学（一）

（科目代码：301）

考试时间：180 分钟，试卷总分：150 分

## 考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。

4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

**(以下信息考生必须认真填写)**

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 考生编号 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 考生姓名 | | | | | | | | | | | | | | | |

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 设函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　　）．

A. $f(1)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$　　C. $f'(1)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=1$

【答案】选 B

【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$，故选 B.

2. 设函数$z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中$f(u)$可导，若$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则（　　）．

A. $f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$　　B. $f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$　　C. $f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=1$　　D. $f(1)=0,f'(1)=1$

【答案】选 B

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\dfrac{y}{x}\right)+xyf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+xy\cdot f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)$

则

$$xyf\left(\frac{y}{x}\right)+x^2yf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)+yxf\left(\frac{y}{x}\right)+xy^2f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=2xyf\left(\frac{y}{x}\right)+0=y^2(\ln y-\ln x)①$$

$$\xrightarrow{令x=1,y=1}\Rightarrow f(1)=0$$

①式对$x$求导$2yf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2xyf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=y^2\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

令$x=y=1\Rightarrow2f(1)+(-2)f'(1)=-1,f'(1)=\dfrac{1}{2}$，故选 B.

3.已知数列$\{x_n\}$，$-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$.则（　）

A.当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

B.当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

C.当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

D.当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

【答案】选 D

【解析】$x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\{x_n\}$发散. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)=\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)=\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left((-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)$不存在，故选 D.

4.已知$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x,I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x,I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$,则(　　).

A.$I_1<I_2<I_3$　　B.$I_2<I_1<I_3$　　C.$I_1<I_3<I_2$　　D.$I_3<I_2<I_1$

【答案】选 A

【解析】$f(x)=\dfrac{x}{2}-\ln(1+x)$，$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x-1}{2(1+x)}<0,x\in(0,1)$

$$f(0)=0\Rightarrow\frac{x}{2}\le\ln(1+x),I_1<I_2.$$

现比较$I_2$和$I_3$，即比较$\dfrac{2\ln(1+x)}{2(1+\cos x)}$与$\dfrac{2x}{1+\sin x}$

$$\cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}, x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^2 > \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{x}{2} > 1 + \sin x$$

$$2(1+\cos x) > 1 + \sin x$$

即$\dfrac{1}{2(1+\cos x)} < \dfrac{1}{1+\sin x}$

而$2\ln(1+x) < 2x \quad x \in (0,1)$

则$I_2 < I_3$.

故选 A.

5.下列是 $A_{3\times3}$ 可对角化的充分而非必要条件是

A.$A$有3个不同特征值

B.$A$有3个无关特征向量

C.$A$的任意两个特征向量正交

D.$A$的属于不同特征值的特征向量相互正交

【答案】选 A

【解析】由题意，三个不同特征值可以推出 $A$ 能相似对角化，但是反之不能推出，故选 A.

6.设$A$、$B$为$n$阶矩阵，$E$为单位矩阵，若方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解，则（ ）.

A.方程组$\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y = 0$只有零解

B.方程组$\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y = 0$只有零解

C.方程组$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$与$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$同解

D.方程组$\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$与$\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$同解

【答案】选 C

【解析】$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ay_1 + By_2 = 0 \\ By_2 = 0 \end{cases}$ ①

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{B}y_3 + \boldsymbol{A}y_4 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}y_4 = \boldsymbol{0} \end{cases} ②$$

由①得$\begin{cases} \boldsymbol{A}y_1 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}y_2 = \boldsymbol{0} \end{cases}$；由②得$\begin{cases} \boldsymbol{A}y_4 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}y_3 = \boldsymbol{0} \end{cases}$

由题 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}x = \boldsymbol{0}$ 同解可知①的解是②的解，②的解也是①的解，故选 C.

7. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{Bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{Bmatrix},$$

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 $\lambda$ 的取值范围是（　　）.

A. $\{0,1\}$ B. $\{\lambda|\ \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$ C. $\{\lambda|\ \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$ D. $\{\lambda|\ \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$

【答案】选 C

【解析】

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & (1+\lambda)(1-\lambda^2) \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1 \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$ ，等价

$\lambda = 0 \ \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$ ，等价

$\lambda = -1 \ \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 2$ ，不等价

$\lambda = -2 \ \Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$，$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 3$ ，不等价

其它时，$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$ ，等价

故 $\{\lambda|\ \lambda \in \boldsymbol{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$，故选 C.

8. 设随机变量 $X \sim U(0,3)$，随机变量 $Y$ 服从参数2的泊松分布，且 $X$ 与 $Y$ 的协方差为-1，则 $D(2X - Y + 1)$=（　）.

A.1　　B.5　　C.9　　D.12

【答案】选 C

【解析】$DX=\frac{(3-0)^2}{12}=\frac{3}{4}$， $DY=2$,

$D(2X-Y+1)=4DX+DY-4\operatorname{cov}(X,Y)=3+2-4\cdot(-1)=9$. 故选 C.

9. 设随机变量$X_1,X_2...X_n$独立同分布，记$E(X_i^k)=\mu_k(k=1,2,3,4)$, 则由切比雪夫不等式，对任意$\varepsilon>0$有$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geq\varepsilon\right\}\leq$

$A.\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$ $B.\frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n\varepsilon^2}}$ $C.\frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$ $D.\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n\varepsilon^2}}$

【答案】A

【解析】$u_k=EX^k,u_2=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=EX^2$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\left(EX^4-\left(EX^2\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\mu_4-\mu_2^2\right)$$

故$P\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right)\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}{\varepsilon^2}=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$. 故选 A.

10. 设随机变量$X\sim N(0,1)$，在$X=x$条件下随机变量$Y\sim N(x,1)$，则$X$与$Y$相关系数为（ ）.

A.$\frac{1}{4}$ B.$\frac{1}{2}$ C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】$f(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$， $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$， $f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2-2xy+x^2}{2}}$，

$EX=0,DX=1$.

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xy\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{2x^2+y^2-2xy}{2}}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot xdx=2\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\xrightarrow{t=\frac{x^2}{2}} 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}\cdot 2t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2t}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0,$$

$$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+x^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

$$\rho_{XY}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{EXY}{\sqrt{EY^2-(EY)^2}}=\frac{EXY}{\sqrt{EY^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故选 D.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 函数$f(x,y)=x^2+2y^2$在点$(0,1)$的最大方向导数为 ____.

【答案】4

【解析】沿着梯度方向，方向导数最大，最大值为梯度的模，首先求梯度：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=4,\mathbf{grad}f\big|_{(0,1)}=0\vec{i}+4\vec{j}.$$

12. $\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ ________.

【答案】4

【解析】

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}2\sqrt{x}=2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=4\mathrm{e}-2\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4\mathrm{e}-2\cdot2\sqrt{x}\Big|_1^{\mathrm{e}^2}\\&=4\mathrm{e}-(4\mathrm{e}-4)=4.\end{aligned}$$

13. 当$x\ge0,y\ge0$时，$x^2+y^2\le k\mathrm{e}^{x+y}$恒成立，则$k$的取值范围是______.

【答案】$k\ge4\mathrm{e}^{-2}$

【解析】

$\left(x^2+y^2\right)\cdot \mathrm{e}^{-x-y}\le k.$

令$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-x-y}$,

求$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-x-y}$在$x\ge 0, y\ge 0$的最大值，

$x=0$时，$f(0,y)=y^2\mathrm{e}^{-y}$. 得点 $(0,2), f(0,2)=4\mathrm{e}^{-2}$.

$y=0$时，$f(x,0)=x^2\mathrm{e}^{-x}$. 得点 $(2,0), f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}$.

$x>0, y>0$时, $f_x'=2x\mathrm{e}^{-x-y}-\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-x-y}$　$f_y'=2y\mathrm{e}^{-x-y}-\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-x-y}$

$f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$,因此$k\ge 4\mathrm{e}^{-2}$

14.已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$的收敛域为$(a,+\infty)$则$a=$_____.

【答案】$-1$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\mathrm{e}^{-(n+1)x}\cdot\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{nx}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\mathrm{e}^{-x}\right|=\mathrm{e}^{-x-1}$$

令$\mathrm{e}^{-x-1}<1\Rightarrow x>-1$

所以$a=-1$

15. 已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，若矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\left(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,

则$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$_____.

【答案】$-\boldsymbol{E}$

【解析】

$$\left[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}.$$

16. 设 $A,B,C$ 为随机事件，且 $A$与$B$ 互不相容，$A$与$C$ 互不相容，$B$与$C$ 相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$，则$P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=$_______.

【答案】$\dfrac{5}{8}$

【解析】

$$P(AB)=0,P(AC)=0,P(BC)=P(B)\cdot P(C)$$

$$P(B\cup C)|(A\cup B\cup C)=\frac{P[(B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)]}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-0-\frac{1}{9}+0}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{5}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{5}{8}.$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

【解析】

$$y=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left[\int(2+\sqrt{x})e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\sqrt{x}}\left[\int(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx+C\right]$$

$$=e^{-\sqrt{x}}\left[\int 2e^{\sqrt{x}}dx+\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx+C\right]$$

$$=e^{-\sqrt{x}}\left[2xe^{\sqrt{x}}-\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx+\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx+C\right]$$

$$=2x+Ce^{-\sqrt{x}}$$

代入 $x=1$，$2+Ce^{-1}=3\Rightarrow C=e$，所以 $y=2x+e^{1-\sqrt{x}}$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+e^{1-\sqrt{x}}}{x}=2,b=\lim_{x\to+\infty}2x+e^{1-\sqrt{x}}-2x=0.$$

斜渐近线为：$y=2x$.

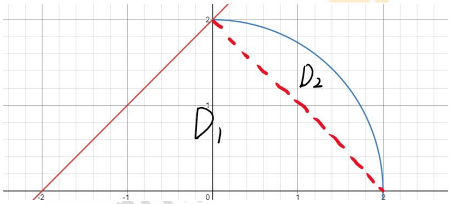
18.（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ .

$$I=\iint\limits_D\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$




补线 $x+y=2$（图中虚线），根据对称性

$$=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^{2}2r\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4-\frac{4}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\right)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin2\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin2\theta}{1+\sin2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi+2-2+\pi-2=2\pi-2.$$

19.（本题满分 12 分）

已知 $\Sigma$ 为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1(x\ge0,y\ge0,z\ge0)$ 的上侧，$L$ 为 $\Sigma$ 的边界曲线，其正向与 $\Sigma$ 的正法向量满足右手法则，计算曲线积分

$$I=\oint\limits_L\left(yz^2-\cos z\right)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+\left(2xyz+x\sin z\right)\mathrm{d}z.$$

【解析】

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz^2-\cos z & 2xz^2 & 2xyz+x\sin z\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\left(-2xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$$

令 $\Sigma_1$： $4x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0$， $z=0$ 指向 $z$ 轴负向，

$\Sigma_2$： $4x^2+z^2\le 1,x\ge 0,z\ge 0$， $y=0$ 指向 $y$ 轴负向，

$\Sigma_3$： $y^2+z^2\le 1,y\ge 0,z\ge 0$， $x=0$ 指向 $x$ 轴负向，

则：

$$\begin{aligned}I=&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\iint_{\Sigma_1}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&-\iint_{\Sigma_2}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\iint_{\Sigma_3}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&=\iiint_{\Omega}(2z-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0-0-0=0.\end{aligned}$$

20.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有 2 阶连续导数，证明： $f''(x)\ge 0$ 的充分必要条件是对不同的实数 $a,b$， $f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

【解析】证明：由泰勒公式：

$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$， $\xi$ 介于 $x$ 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b\left[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\mathrm{d}x\\&=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

必要性：若 $f''(x)\ge 0$，则 $f''(\xi)\ge 0$，有 $f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

充分性：若存在 $x_0$ 使得 $f''(x_0)<0$，因为 $f(x)$ 有二阶连续导数，故存在 $\delta>0$ 使得 $f''(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内恒小于零，记 $a=x_0-\delta,b=x_0+\delta$，此时：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \int_a^b \left[\frac{1}{2} f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\mathrm{d}x < f(\frac{a+b}{2})(b-a)$$

矛盾，故 $f''(x) \geq 0$.

综上，充分性必要性均得证.

21.（本题满分 12 分）

已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$.

（1）写出 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 对应的矩阵；

（2）求正交变换 $x=\boldsymbol{Q}y$ 将 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准形；

（3）求 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=0$ 的解.

【解析】

（1）由题意，二次型对应矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

（2）易知 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=1$，且 $tr\left(\boldsymbol{A}\right)=14$，故特征值为 $0,0,14$

$\lambda=0$ 时，

$$0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得特征向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\lambda=14$ 时，

$$14E-A=\begin{pmatrix}13&-2&-3\\-2&10&-6\\-3&-6&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-5&3\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

单位化后得：$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{-3}{\sqrt{70}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-6}{\sqrt{70}}&\frac{2}{\sqrt{14}}\\0&\frac{5}{\sqrt{70}}&\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$，标准型为：$f=14y_3^2$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，记$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，有：

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\left\|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right\|^2=0\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0.$$

有：$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，即 $x_1+2x_2+3x_3=0$

做：$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{y}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}_2=\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$，

则：$\boldsymbol{x}_1=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$，其中 $k_1,k_2$ 为任意常数.

22.（本题满分 12 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自均值为 $\theta$ 的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自

均值为$2\theta$的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$是未知参数.

利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D(\hat{\theta})$.

【解析】总体$X$的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

总体$Y$的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所以似然函数为：

$$L(\theta)=\begin{cases}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}\cdot\left(\frac{1}{2\theta}\right)^m\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j}, & X_i>0\,(i=1,2\ldots n)且Y_j>0\,(j=1,2\ldots m)\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当$X_i>0(i=1,2\ldots n)$且$Y_j>0(j=1,2\ldots m)$时，

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i-m\ln 2\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{j=1}^{m}Y_j$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{-n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i-m\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{2}{(2\theta)^2}\sum_{j=1}^{m}Y_j$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，得：$\hat{\theta}=\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j}{2m+2n}$

$$\begin{aligned}D\hat{\theta}&=\frac{1}{4(m+n)^2}\left[4\sum_{i=1}^{n}DX_i+\sum_{j=1}^{m}DY_j\right]\\&=\frac{1}{4(m+n)^2}\left[4n\theta^2+4m\theta^2\right]\\&=\frac{\theta^2}{m+n}.\end{aligned}$$